

文章编号: 1000-7598 (2014) 03-705-05

基于瑞利-里兹法的岩土三棱柱堆积体的 基底应力分布的研究

毕 港¹, 韦健飞², 周 蕾¹

(1. 德州 A&M 大学 扎卡里土木工程系, 美国, 大学城 77843; 2. 广西交通科学研究院, 南宁 530007)

摘 要: 对岩土三棱柱堆积体的基底应力分布进行了研究, 在基底应力的理论解难以求得的情形下, 基于瑞利-里兹法求解出基底应力分布的近似解, 并具体计算且对比了不同坡比、泊松比、基底边界条件下基底应力分布的变化, 得出如下结论: 基底法向应力存在应力凹陷现象, 坡度越陡, 应力凹陷程度越大, 底边有约束时应力凹陷程度更明显; 泊松比对基底法向应力的分布几乎无影响, 泊松比主要影响基底切向应力分布的形态, 且泊松比越大, 基底切向应力值越大; 坡比改变基底切向应力的最大值及其所处位置, 坡比越大, 基底切向应力值越大, 且基底切向应力最大值距离基底中心越远。

关 键 词: 基底应力分布; 瑞利-里兹法; 应力凹陷

中图分类号: TU431 文献标识码: A

Study of stress distribution on base of geotechnical triangular prism by Rayleigh-Ritz method

BI Gang¹, WEI Jian-fei², ZHOU Lei¹

(1. Zachry Department of Civil Engineering, Texas A&M University, College Station 77843, USA;

2. Guangxi Transportation Research Institute, Nanning 530007, China)

Abstract: The basal stress of geotechnical triangular prism is studied. While it is impossible to get the analytical solution of basal stress distribution of geotechnical triangular prism, the approximate solution of basal stress distribution of geotechnical triangular prism is got with the Rayleigh-Ritz method. By comparison with different solutions of different slope ratios, different Poisson's ratios, and different boundary conditions at the base, the results are drawn as follows. There is depression of basal normal stress on the base of geotechnical triangular prism. The steeper the slope is, the more depression of basal normal stress is. Much more depression occurs with the boundary condition of constraints on the base. Meanwhile, the value of Poisson's ratio has little impact on the distribution of basal normal stress. The Poisson's ratio mainly impacts the distribution of basal shear stress. The larger the value of Poisson's ratio is, the larger the basal shear stress is. The slope ratio has large influence on the position and value of the maximum basal shear stress. The larger the slope ratio is, the larger the basal shear stress is, and the larger distance between the maximum basal shear stress and center of base is.

Key words: basal stress distribution; Rayleigh-Ritz method; depression of stress

1 引 言

基底应力是基础底面作用于地基表面接触处的压力。基底压力的大小和分布与上部建筑结构情况、基础的刚度、形状、底面面积以及地基岩性等因素有关^[1]。本文要研究的基底应力是岩土堆积体底面与下伏的岩土层接触面处的压力。本文所指的岩土

堆积体是机械或人工堆积而成的呈一定形状(如棱柱或圆锥)的岩土体, 如砂堆、矿渣堆、煤堆、公路路堤等。

工程实践中经常会遇到岩土堆积体的基底应力, 如高速公路的设计施工必然涉及到路堤的沉降变形控制^[2], 这与基底应力密切相关; 再如研究矿堆、煤堆的基底应力状态对设计堆高也有较大的指

收稿日期: 2013-01-11

基金项目: 广西科学研究与技术开发项目 (No. 桂科金 0136019)。

第一作者简介: 毕港, 男, 1987 年生, 博士研究生, 主要从事岩土工程研究。E-mail: 051150002@163.com

导意义。

在 20 世纪 90 年代以前,人们处理基底应力时都采用 Osterberg^[3]所假定的线形分布。20 世纪 90 年代,陆续有物理学家如 Waston^[4]、Savage^[5]在其研究中提及砂堆基底的应力并非线性分布。

为了求解基底应力的理论解,国外学者做了(或引用了)多种辅助假设,其中较为突出的两个假设是径向应力场假设(radial stress field)和固定主应力轴假设(fixed principal axes)。

径向应力场假设最早由 Sokolovskii^[6]提出,被应用于解释砂堆内的应力状态,它提出砂堆内发生塑性破坏时并非所有砂都达到其内摩擦角,此时动用的内摩擦角的数值和砂自身的内摩擦角数值满足对数螺旋关系,调整对数螺旋线的形状能够与砂堆基底应力凹陷现象的部分试验结果相吻合。

在 Bouchaud^[7]的文章中就已显现固定主应力轴假设的雏形,后来其学生 Wittmer^[8]在自然杂志上提出该假设。固定主应力轴假设指砂堆内的主应力轴是不变的(当然不同条件下的形成砂堆内的主应力轴不同),通过分析选取合适的主应力轴,得到基底应力状态与和大部分试验数据非常吻合。Wittmer 等^[9-10]在其后续研究中较为详细地分析了固定主应力轴假设的合理和不合理之处。

本文将从弹性力学基本理论出发,在基底应力理论解极难求解情况下,结合瑞利-里兹法分析研究岩土三棱柱堆积体基底应力状态的近似解,并分析不同坡比、不同泊松比对岩土三棱柱堆积体基底应力状态的影响。

2 基底应力分布的两类情形

如图 1 所示,无限长(纵向长度远大于横截面高度或底宽)岩土三棱柱,取任一横截面,考虑对称性,按底边是否存在水平约束,分为底边无水平约束(见图 2)和底边有水平约束(见图 3)两类情形。图 2、3 边界条件已知,考虑理想弹性模型,岩土三棱柱堆积体内应力分布可解。

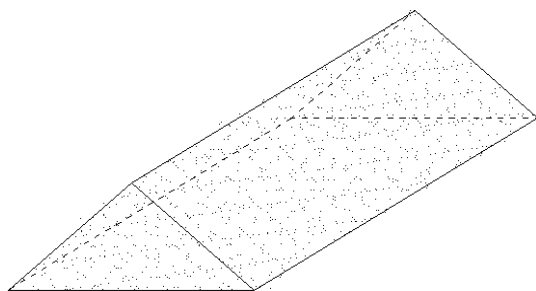


图 1 岩土三棱柱堆积体示意图

Fig.1 Sketch of geotechnical triangular prism

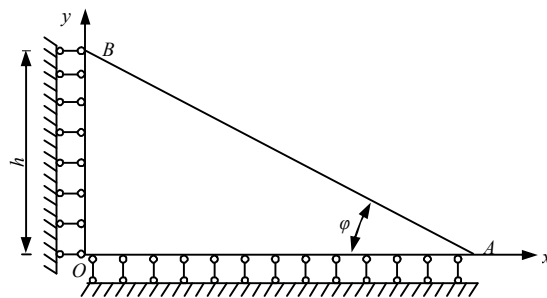


图 2 底边无水平约束

Fig.2 Without horizontal constraint on the base

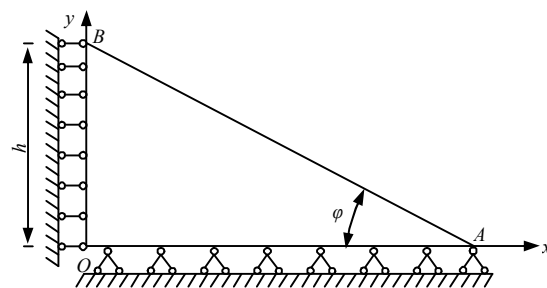


图 3 底边有水平约束

Fig.3 With horizontal constraint on the base

3 基底应力分布的理论解

按弹性力学基本理论^[11],应力状态满足如下平衡微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $u = u(x, y)$ 为区域内任意点的水平位移; $v = v(x, y)$ 为区域内任意点的垂直位移; E 为弹性模量; μ 为泊松比; γ 为重度。

应力表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)} (\mu \epsilon_x + \epsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= 0, (v)_{y=0} = 0, (\tau_{xy})_{x=0} = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=0} &= 0 \text{ 基底无水平约束} \\ (u)_{y=0} &= 0 \text{ 基底有水平约束} \\ \sin \varphi (\sigma_x)_{y=-x \tan \varphi + h} + \cos \varphi (\tau_{xy})_{y=-x \tan \varphi + h} &= 0 \\ \cos \varphi (\sigma_y)_{y=-x \tan \varphi + h} + \sin \varphi (\tau_{xy})_{y=-x \tan \varphi + h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

联立式(1)~(3)无法求得基底应力分布的理论解,下文转向求解基底应力分布的近似解。

4 基底应力分布的近似解

基底应力近似解的求解思路(瑞利-里兹法^[12])如下:

(1) 假定区域内任意点的水平位移 $u(x, y)$ 和垂直位移 $v(x, y)$ 的表达式。

(2) 将上述表达式 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 代入边界条件, 减少表达式中的待定参数。

(3) 构造泛函 $\Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \gamma v(x, y) \right] dx dy$ 。

(4) 依据最小势能原理, 对泛函进行变分求其驻值, 确定待定参数。

4.1 底边无水平约束时

假定任意点的水平位移 $u(x, y)$ 和垂直位移 $v(x, y)$ 的表达式是坐标的三次多项式, 如下:

$$u = x(a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2) \quad (4)$$

$$v = y(b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2) \quad (5)$$

式(4)、(5)自然满足位移边界条件。此时剪应力表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{E}{2(1+\mu)} (a_3x + a_5x^2 + 2a_6xy + b_2y + 2b_4xy + b_5y^2) \end{aligned} \quad (6)$$

代入边界条件, 有

$$\begin{cases} (\tau_{xy})_{x=0} = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \quad b_5 = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=0} = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \quad a_5 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式(4)、(5)可简化为

$$u = x(a_1 + a_2x + a_4x^2 + a_6y^2) \quad (8)$$

$$v = y(b_1 + b_3y + b_4x^2 + b_6y^2) \quad (9)$$

求得应变表达式为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + 2a_2x + 3a_4x^2 + a_6y^2 \quad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2 \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2a_6xy + 2b_4xy \quad (12)$$

代入式(2)求应力表达式并改写为

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_x &= a_1 + 2a_2x + 3a_4x^2 + a_6y^2 + \\ &+ \mu(b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_y &= b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2 + \\ &+ \mu(a_1 + 2a_2x + 3a_4x^2 + a_6y^2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1-\mu^2}{E} \tau_{xy} = (1-\mu)(a_6 + b_4)xy \quad (15)$$

将式(13)~(15)代入式(3)后两个等式(斜边上的应力边界条件), 将等式按 x 的降次排列, 得到6个等式, 8个待定参数可以最终用两个待定参数表示, 再代入泛函表达式, 通过变分求解这两个待定参数, 至此, 任意点应力状态被求出。

4.2 底边有水平约束时

假定任意点的水平位移 $u(x, y)$ 和垂直位移 $v(x, y)$ 的表达式是坐标的三次多项式, 如下:

$$u = xy(a_1 + a_2x + a_3y) \quad (16)$$

$$v = y(b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2) \quad (17)$$

式(16)、(17)自然满足位移边界条件。此时剪应力表达式为

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{E}{2(1+\mu)} (a_1x + a_2x^2 + 2a_3xy + b_2y + 2b_4xy + b_5y^2) \end{aligned} \quad (18)$$

代入边界条件, 有

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \quad b_5 = 0 \quad (19)$$

式(16)、(17)可简化为

$$u = xy(a_1 + a_2x + a_3y) \quad (20)$$

$$v = y(b_1 + b_3y + b_4x^2 + b_6y^2) \quad (21)$$

求得应变表达式为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1y + 2a_2xy + a_3y^2 \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2 \quad (23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_1x + a_2x^2 + 2a_3xy + 2b_4xy \quad (24)$$

代入式(2)求应力表达式并改写为

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_x &= a_1y + 2a_2xy + a_3y^2 + \\ &+ \mu(b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_y &= b_1 + 2b_3y + b_4x^2 + 3b_6y^2 + \\ &+ \mu(a_1y + 2a_2xy + a_3y^2) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{1-\mu^2}{E} \tau_{xy} = \frac{(1-\mu)}{2} (a_1x + a_2x^2 + 2a_3xy + 2b_4xy) \quad (27)$$

将式(25)~(27)代入式(3)后两个等式(斜边上的应力边界条件), 将等式按 x 的降次排列, 得到6个等式, 消去部分待定参数(用其他待定参数表示), 再代入泛函表达式通过变分求解待定参数,

至此,任意点应力状态被求出。

5 几种特殊情形的基底应力分布

按上文求解的基底应力分布解析表达式过于复杂,不便于分析,但对于具体情形,应力表达式还是比较容易求解的,例如,坡比 1:1,泊松比 0.3,弹性模量 10 MPa 时,底边无水平约束时,基底法向应力公式为

$$(\sigma_y)_{y=0} = -0.665x^2 - 0.228x + 0.868 \quad (28)$$

底边有水平约束时,基底法向应力和切向应力公式为

$$(\sigma_y)_{y=0} = -0.705x^2 + 0.759 \quad (29)$$

$$(\tau_{xy})_{y=0} = -0.359x^2 + 0.424x \quad (30)$$

笔者具体计算了几种不同坡比、不同泊松比下底边无水平约束时的基底法向应力表达式和底边有约束时的基底法向应力表达式和基底切向应力表达式。

为具体形象地比较不同坡比、不同泊松比下基底法向应力分布和基底切向应力分布,笔者将横纵坐标分别进行如下无量纲处理,如图 4~9 所示。图中某点横坐标=底边上某点横坐标/ $h \cot \alpha$, $h \cot \alpha$ 为图 2、3 中底边 OA 长度。图中某点纵坐标=底边上某点/ $\sigma_y/(\gamma h)$, 其中 h 指模型的高度,在不同坡比下保持不变。

从图 4 可以看出,底边靠近中心处(底边上横坐标为 0 处)存在应力凹陷现象,且随着坡比的变化,即 $\cot \alpha$ 逐渐增大,应力凹陷程度逐渐减轻。坡比从 1:1 变化为 1:2.5 时,底边上横坐标为 0 处 σ_y 由 0.799 变化为 0.916,变化幅度达到 14.5%。

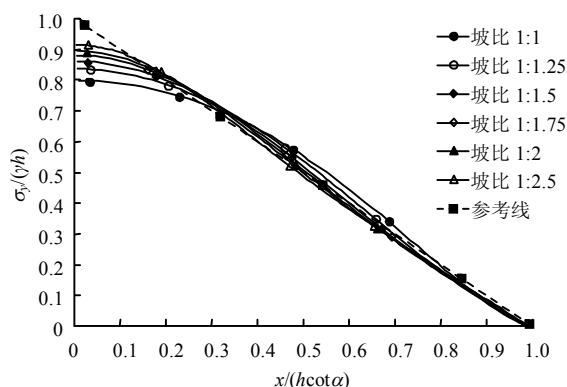


图 4 无水平约束时不同坡比下基底法向应力分布图
Fig.4 Distributions of basal normal stress with different slope ratios without horizontal constraint

从图 5 可以看出,泊松比对基底应力的影响极小,泊松比从 0.27 变化为 0.32,底边上横坐标为 0 处 σ_y 值随泊松比的变化幅度仅为 1.25% 左右。

对比图 4、6 可以看出,底边上的水平约束会使基底法向应力凹陷现象比底边无水平约束时更明显。

从图 7 可以看出,且随着坡比的变化,即 $\cot \alpha$ 逐渐增大,底边上的 τ_{xy} 最大值在变小,且 τ_{xy} 最大值所处的横坐标向左移动。

从图 8、9 可以看出,泊松比的变化几乎只改变底边上 τ_{xy} 值(变化幅度可达 10%),而不改变底边上的 σ_y 值。

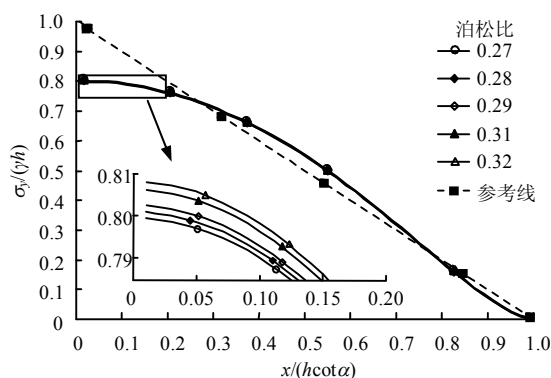


图 5 无水平约束时不同泊松比下基底法向应力分布图
Fig.5 Distributions of basal normal stress with different Poisson's ratios without horizontal constraint

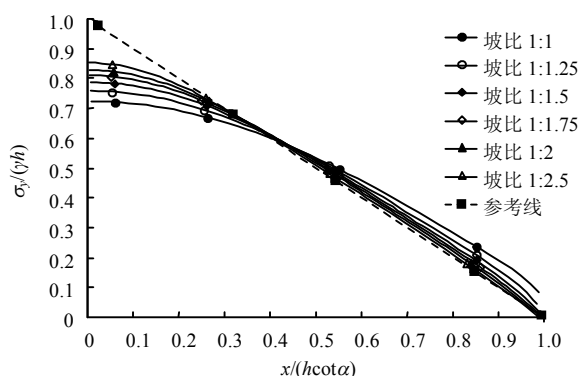


图 6 有水平约束时不同坡比下基底法向应力分布图
Fig.6 Distributions of basal normal stress with different slope ratios with horizontal constraint

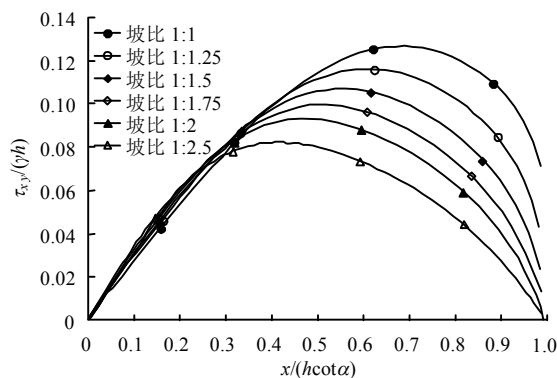


图 7 有水平约束时不同坡比下基底切向应力分布图
Fig.7 Distributions of basal shear stress with different slope ratios with horizontal constraint

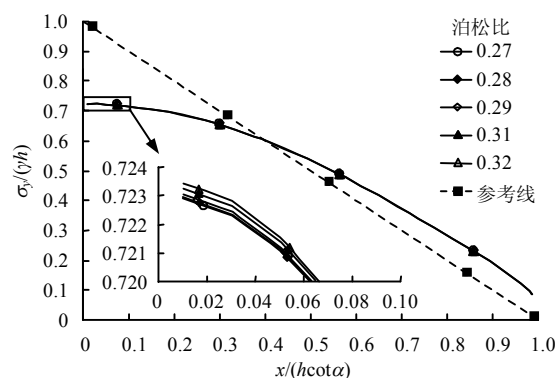


图8 有水平约束时不同泊松比下基底法向应力分布图
Fig.8 Distributions of basal normal stress with different Poisson's ratios with horizontal constraint

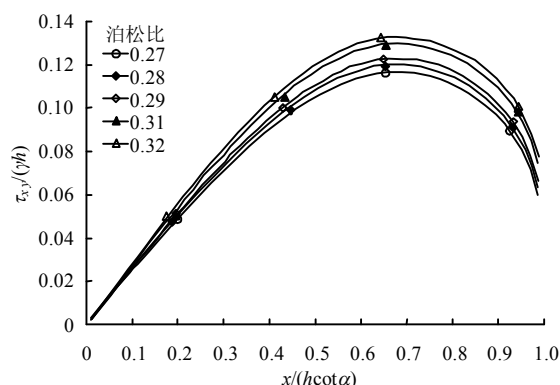


图9 有水平约束时不同泊松比下基底切向应力分布图
Fig.9 Distributions of basal shear stress with different Poisson's ratios with horizontal constraint

6 结 论

(1) 基于瑞利-里兹法求解的底边无约束和底边有约束的两类情形下岩土三棱柱堆积体基底应力分布的近似解, 可以用二次多项式表达。

(2) 岩土堆积体的基底法向应力, 并不是随基底横坐标的变化呈线性分布, 而是呈曲线分布。岩土堆积体的基底法向应力存在应力凹陷和应力隆起现象。

(3) 当基底无水平约束时, 坡比、泊松比对基底法向应力的分布形态有影响。首先, 且随坡比变缓, 法向应力凹陷程度在减轻; 其次, 泊松比的改变引起基底法向应力值的变动幅度为 1.25% 左右, 而坡比的改变引起基底法向应力值的变动幅度在 14% 左右。

(4) 底边有约束相比底边无约束时, 应力凹陷程度更明显。泊松比主要影响基底切向应力分布的形态, 坡比改变基底切向应力的最大值及其所处位置。

参 考 文 献

- [1] 傅裕寿, 张正威. 土力学与地基基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [2] 中交第二公路勘察设计研究院. JTG D30—2004 公路路基设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
- [3] OSTERBERG J O. Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading[C]//Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. London: Butterworths, 1957: 393—394.
- [4] WATSON A. Searching for the sand-pile pressure dip[J]. *Science*, 1996, 273(5275): 579—580.
- [5] SAVAGE S B. Problems in the statics and dynamics of granular materials[C]//Powders and Grains 97. Rotterdam: Balkema, 1997: 185—194.
- [6] SOKOLOVSKII V V. Statics of granular media[M]. Oxford: Pergamon, 1965.
- [7] BOUCHAUD J P, CATES M E, CLAUDIN P J. Stress distribution in granular media and nonlinear wave equation[J]. *Journal de Physique I*, 1995, 5(6): 639—656.
- [8] WITTMER J P, CLAUDIN P, CATES M E, et al. An explanation for the central stress minimum in sand piles[J]. *Nature*, 1996, 382(6589): 336—338.
- [9] WITTMER J P, CATES M E, CLAUDIN P. Stress propagation and arching in static sand piles [J]. *Journal de Physique I*, 1997, 7(1): 39—80.
- [10] WITTMER J P, BOUCHAUD J-P, CLAUDIN P. Development of stresses in cohesionless poured sand[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society, London* 356, 1998, (1747): 2535—2561.
- [11] 杨桂通. 弹性力学简明教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [12] 姚端正, 梁家宝. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2010.